

**EXERCICE N° 1 ( 6 points )**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On donne les points  $A(2, 1, 0)$ ;  $B(1, 2, 2)$  et  $C(3, 3, 1)$ .

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .  
b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.  
c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :  $x - y + z - 1 = 0$ .  
d) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 2) Calculer la distance du point O au plan (ABC).
- 3) a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.  
b) Déterminer les coordonnées du point G centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

**EXERCICE N° 2 ( 7 points )**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la famille des plans  $P_m : (m+1)x + (3-m)y + (5 - 2m)z + 3m - 1 = 0$ .  
où m est un paramètre réel.

- 1) Vérifier que les points I(-2,1,0) et J(-1, -6,4) appartiennent à  $P_m, \forall m \in \mathbb{R}$
- 2) En déduire que tous les plans  $P_m$  contiennent une droite  $\Delta$  dont on donnera les équations paramétriques
- 3) Soit le plan  $Q : x - y - 2z + 3 = 0$ .  
a) Déterminer une équation cartésienne du plan  $Q'$  de la famille des plans  $P_m$  perpendiculaire à Q.  
b) Montrer que  $\Delta$  est incluse dans Q.  
c) En déduire que  $Q' \cap Q = \Delta$
- 4) Soit le point A (1, 2,-1) et D la droite dont une représentation paramétrique est
$$D: \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -\alpha \\ z = -2\alpha + 2 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$
  
a) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur D  
b) En déduire la distance du point A à la droite D.



**EXERCICE N° 3 ( 7 points )**

On considère les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$U_n = \frac{2n+1}{3^n} \quad \text{et} \quad V_n = U_{n+1} - \frac{1}{3} U_n$$

- 1) a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante  
b) Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

**On admet dans la suite que**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

- 2) Pour tout entier naturel  $n, n \geq 2$ , on pose  $S_n = \frac{3}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \dots + \frac{2n+1}{3^n}$ .

a) Calculer  $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$  en fonction de  $n$  puis montrer que :  $S_n = 2 - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{1}{2} U_n$ .

b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

- 3) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $t_n = (2n + 1) (\operatorname{tg} x)^{2n}$  ou  $x \in ] 0, \frac{\pi}{2} [$ .

a) On prend  $x \in ] 0, \frac{\pi}{6} [$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $t_n \leq U_n$   
puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$

b) \* On prend  $x \in ] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} [$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$t_n \geq 2n + 1.$$

\* En déduire que la suite  $(t_n)$  est divergente

c) On prend  $x = \frac{\pi}{4}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{t_k}{n^2 + 1}$ .

Calculer  $b_n$  en fonction de  $n$  puis déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

